Ueber die

Conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der hohen philosophischen Facultät

der

Universität Zürich

von

Hermann Amstein,
von Wyla, Ct. Zürich.

ZÜRICH,
Druck von Zürcher und Furrer
1872.

Ueber die

Conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der hohen philosophischen Facultät

der

Universität Zürich

von

Hermann Amstein,
von Wyla, Ct. Zürich.

ZÜRICH,
Druck von Zürcher und Furrer
1872.

Meiner lieben Mutter

Anna Maria Amstein-Zuppinger

in

aufrichtiger Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Aufgabe, welche am Schlusse des Wintersemesters 1870/71 in dem mit der VI. Abtheilung des eidg. Polytechnicums in Zürich verbundenen mathematischen Seminar von Herrn Prof. Dr. Schwarz gestellt wurde und enthält die weitere Ausführung eines im Juni v. J. vom Verfasser, als damaligem Mitgliede dieses Seminars, gehaltenen Vortrages über die Lösung derselben.

In dem zunächst folgenden ersten Theile habe ich in dem Rahmen eines kurzen geschichtlichen Ueberblicks etwas näher die Stellung zu bezeichnen gesucht, welche unter den die conforme Abbildung überhaupt betreffenden Aufgaben die in dem Titel genannte specielle Abbildungsaufgabe einnimmt. Die Lösung dieser Aufgabe, welche mit Hülfe der elliptischen Functionen erhalten wird, bildet den Inhalt des zweiten Theiles dieser Arbeit.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, auch öffentlich bei dieser Gelegenheit meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Schwarz, meinen Dank auszusprechen für mehrfache gütige Winke und Rathschläge, welche mir bei Abfassung dieser Arbeit förderlich gewesen sind.

I.

Der Ursprung der mathematischen Abbildung im Allgemeinen ist in dem Bedürfnisse zu suchen, von der Erdoberfläche und von der Himmelskugel oder von einzelnen Theilen derselben den wahren Verhältnissen möglichst genau entsprechende Bilder in der Ebene zu entwerfen. Dieses Bedürfniss ist so alt, als die Astronomie und die mathematische Geographie. Da weder die Kugel, noch das Rotationsellipsoid abwickelbare Flächen sind, so ist die Aufgabe, von der Erde ebene Bilder zu entwerfen, die alle Verhältnisse auf derselben getreu wiedergeben, unlösbar. Es blieb daher Nichts übrig, als für verschiedene Zwecke auch verschiedene sogenannte Karten nach solchen Grundsätzen zu entwerfen, welche es möglich machten, wenigstens näherungsweise einer oder einigen an die Karte für einen bestimmten Zweck zu stellenden Anforderungen zu genügen, d. h. man war genöthigt, verschiedene Projectionsmethoden zu ersinnen.

Schon Hipparch und Ptolemäus kannten die perspectivischen Projectionen, und die Erfindung der sogenannten stereographischen Projection, welche das Projectionscentrum auf die Oberfläche der Kugel verlegt und zur Bildebene die zum Projectionscentrum als einem Pole gehörige Aequatorebene wählt, wird Hipparch zugeschrieben. (Vergleiche das Handbuch der Math., Physik u. s. f. von Herrn Prof. Dr. Rud. Wolf, Bd. II, pag. 151.) Zu Seekarten wurde seit der Mitte des 16. Jahrhunderts die sogenannte Mercator'sche Projection angewandt, welche die Parallelkreise, die Meridiane und die loxodromischen Linien als Gerade erscheinen lässt. (Ueber Gerhard

Kremer oder Mercator vergleiche im angeführten Handbuche Bd. II, pag. 153.)

Wahrscheinlich zum ersten Mal wissenschaftlich untersucht und hinsichtlich ihrer Zweckmässigkeit mit einander verglichen wurden die verschiedenen Kartenprojectionen von J. H. Lambert in der Abhandlung: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten, welche sich im 3. Theile seiner Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (1772) auf pag. 105 bis 199 befindet. Darin unterwirft Lambert alle diejenigen Methoden, welche bis dahin als die zweckmässigsten am häufigsten zur Kartenprojection angewandt worden waren, einer eingehenden Untersuchung, leitet alle wesentlichen Eigenschaften der stereographischen und der Mercator'schen Projection ab, erkennt und würdigt namentlich auch die Eigenschaft der beiden letztgenannten Projectionsarten, die Winkel, welche auf der Kugel verzeichnete Linien in einem gemeinsamen Puncte mit einander bilden, in wahrer Grösse wiederzugeben. Für unsern gegenwärtigen Zweck kommt es in Betracht, zu bemerken, dass Lambert die Aufgabe, von der Erde eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung zu machen, als ein mathematisches Problem erkennt und für den Fall der Kugel und des Sphäroids löst. Veranlasst durch eine Bemerkung in den Untersuchungen über denselben Gegenstand von Lagrange, dem Lambert das Problem mitgetheilt hatte, finden sich auf pag. 156 bereits complexe Grössen zur Lösung dieser Aufgabe eingeführt. Es zeigt sich somit schon in dieser ersten wissenschaftlichen Arbeit über die Theorie der erwähnten besondern Abbildungsarten der Zusammenhang zwischen den Abbildungsaufgaben und der Theorie der Functionen complexen Arguments, der später noch deutlicher hervorgetreten ist.

Eine analytische Theorie der stereographischen Projection gibt Kästner in seinen Dissert. mathem. et phys.; ferner löst etwas später als Lambert ebenfalls Euler das Problem der Kartenprojection in der Abhandlung: De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, Acta acad. scient. imp. petrop. 1777, Pars I.

In den zwei Aufsätzen: Sur la construction des cartes géographiques, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1779 entwickelt Lagrange die Formeln, welche die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung aller Rotationsflächen auf die Ebene vermitteln. In der erstern dieser Abhandlungen (pag. 161 bis 185) behandelt Lagrange dasselbe Problem, wie Lambert und Euler, aber nach einer andern Methode, und gelangt zu einer allgemeinen Lösung. Die zweite Abhandlung (pag. 186 bis 210) enthält neben verschiedenen Folgerungen aus den allgemeinen Untersuchungen die Betrachtung einiger Specialfälle, welche sich aus der allgemeinen Lösung ergeben. In dieser zweiten Abhandlung stellt Lagrange an die Lösung der Aufgabe der in den kleinsten Theilen ähnlichen Abbildung die Nebenbedingung, es sollen den Meridianen und den Parallelkreisen der Kugeloberfläche zwei Curvenschaaren von vorgeschriebener Natur entsprechen, und behandelt vollständig alle diejenigen, für die wirkliche Herstellung von Karten in erster Linie in Betracht kommenden Fälle, in welchen die vorgeschriebenen Curven Kreise sind.

Noch allgemeiner als Lagrange fasst Gauss das Problem der Abbildung in der berühmten Abhandlung: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den klein-

sten Theilen ähnlich wird; (als Beantwortung der von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage) abgedruckt in den Astronomischen Abhandlungen von Schuhmacher, 3. Heft, Altona 1825. In Beziehung auf diese Gauss'sche Arbeit macht Jacobi (Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi, herausgegeben von A. Clebsch, Berlin 1866, pag. 215) die Bemerkung, dass zu dem Inhalte der Lagrange'schen Abhandlung nur wenig hinzuzusetzen gewesen sei, dass gleichwol in der Gauss'schen Abhandlung der Lagrange'schen keine Erwähnung geschehe.

Wenn in dieser Abhandlung die Darstellung der Erdoberfläche auf der Ebene auch Hauptzweck und Ausgangspunkt bleibt, so ist dieselbe, wie schon der Titel ausspricht, doch so allgemein gehalten und wird in derselben die Abbildung so allgemein definirt, dass sie noch gegenwärtig als Grundlage für jede Abbildung einer Fläche auf eine zweite dient.

In einer später veröffentlichten Abhandlung: Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie (Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 2), in welcher Gauss Anwendung von der in der ersten Abhandlung entwickelten Theorie auf Gegenstände der höhern Geodäsie macht, führt Gauss für die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung die seither ebenso gebräuchlich gewordene Benennung conforme Abbildung ein.

Die Zahl der von Gauss gegebenen und an einer andern Stelle anzuführenden Beispiele für die Integration der allgemeinen Differentialgleichung, auf welche die Aufgabe der conformen Abbildung von beliebigen Flächenstücken führt, hat Jacobi vermehrt in der Abhandlung:

Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben. Diese Abhandlung, welche aus dem wissenschaftlichen Nachlasse Jacobi's herrührt, findet sich in Borchardt's Journal, Bd. 59, pag. 74 bis 88 und auch in C. G. J. Jacobi, Math. Werke, Bd. III, Berlin 1871. In derselben hat Jacobi diejenige Anwendung der elliptischen Coordinaten auf das Problem der Kartenprojection vollständig durchgeführt, von welcher er im Jahre 1839 (Monatsberichte der Berliner Akademie 1839, pag. 64 und Crelle's Journal, Bd. 19, pag. 311) die erste Andeutung gegeben hatte. Nachdem in dieser Arbeit die vorhin schon erwähnte Differentialgleichung für den allgemeinen Fall abgeleitet worden, werden folgende specielle Beispiele behandelt: 1) Die Abbildung von Umdrehungsflächen auf einer Ebene mit den Specialfällen der Mercator'schen und der stereographischen Projection; 2) die Abbildung von Kegelflächen auf einer Ebene mit dem Specialfall derjenigen Abbildung des Kegels, welche seine Abwicklung ergibt; 3) die Abbildung von cylindrischen Flächen auf einer Ebene wieder mit dem Specialfall der Abwicklung; 4) die Abbildung des ungleichaxigen Ellipsoids mit den Specialfällen des länglichen und des abgeplatteten Rotationsellipsoids oder Sphäroids.

Im Jahre 1857 hat die philosophische Facultät der Göttinger Universität dieselbe Aufgabe unter Bezugnahme auf die Jacobi'sche Andeutung zum Gegenstand einer Preisfrage gemacht und Herr Ernst Schering eine Lösung geliefert, die 1858 als gekrönte Preisschrift unter dem Titel: Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene erschienen ist.

Es sind nun für die Aufgabe der conformen Abbildung zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Mathe-

matikern auch verschiedene Gesichtspunkte in's Auge gefasst worden, durch deren Hinzutreten die allgemeine, unendlich viele Lösungen zulassende Aufgabe in eine mehr oder weniger bestimmte übergeht. Ursprünglich wurden die mathematischen Untersuchungen über Abbildungsprobleme hauptsächlich zum Zwecke der Verbesserung der Land- und Himmelskarten unternommen und dabei von selbst sich anbietende analytische Probleme mehr als Curiositäten angesehen und als solche entweder nur erwähnt oder wenigstens nicht näher untersucht. Bei dieser Auffassung der Abbildungsaufgaben musste nothwendig an die Abbildung in erster Linie die Forderung der möglichst treuen Wiedergabe des Abgebildeten gestellt werden. Unter diesem Gesichtspunkte sind namentlich die Arbeiten von Lambert und Lagrange und zum Theil wenigstens die erwähnten Arbeiten von Gauss entstanden. Gauss trifft z. B. die Bestimmung, dass wenn es sich etwa um die Abbildung einer Kugelzone handelt und das Aehnlichkeitsverhältniss für eine bestimmte Breite gleich 1 angenommen wird, dann die Aehnlichkeitsverhältnisse für andere Breiten nur um Grössen dritter Ordnung von 1 abweichen dürfen, wobei die Breitenunterschiede als Grössen erster Ordnung angesehen werden. Dass aber durch die Lagrange'schen und die Gauss'schen Arbeiten die Frage nach den besten Abbildungsarten, d. h. nach solchen, bei welchen das Bild auch im Ganzen dem Originale möglichst ähnlich bleibt, noch nicht als abgeschlossen zu betrachten ist, geht aus dem Umstande hervor, dass neuere Arbeiten sich immer noch mit derselben beschäftigt haben. In dieser Richtung ist zu nennen die Abhandlung von Herrn Prof. Dr. H. Weber in Zürich: Ueber ein Princip der Abbildung der

Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene, Borchardt's Journal, Bd. 67, pag. 229 bis 247. Als Fehler einer Stelle der Karte wird in dieser Abhandlung definirt der Logarithmus des Verhältnisses der dort stattfindenden Vergrösserung zu derjenigen in einem willkürlich angenommenen Nullpunkte, und um den Fehler für das ganze abzubildende Flächenstück möglichst klein zu machen, wird nach Analogie der Methode der kleinsten Quadrate die Bedingung dafür aufgestellt, dass ein Integral zu einem Minimum werde, dessen Element das Quadrat jenes Logarithmus multiplicirt mit dem Elemente der abzubildenden Fläche ist. Die Lösung dieser Aufgabe hängt von einer verwickelten partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung ab.

Nach einem etwas anderen Principe sucht Herr F. Eisenlohr zu den besten Abbildungsarten zu gelangen in dem Aufsatze: Ueber Flächenabbildung, Borchardt's Journal, Bd. 72, pag. 143 bis 151. Darin wird als Mass des Fehlers in einem Punkte des Bildes der grösste Werth der Krümmung der durch diesen Punkt des Bildes gelegten geodätischen Linien betrachtet und hierauf ein Integral zu einem Minimum gemacht, dessen Element das Flächenelement des Bildes multiplicirt mit dem Quadrate der grössten Krümmung in demselben ist, wodurch gefunden wird, dass die Abbildung im Innern die kleinste Verzerrung zeigt, wenn die Vergrösserung auf dem ganzen Umfang denselben Werth erhält.

Ein weiterer Gesichtspunkt, der bei Abbildungsaufgaben aufgestellt worden ist, ist der, dass gewissen Curvensystemen des Originals im Bilde Curvensysteme von vorgeschriebenen Eigenschaften entsprechen sollen. Unter die Arbeiten, welche diese be-

sondere Art von Abbildungsaufgaben zum Gegenstande der Behandlung machen, ist die oben schon erwähnte zweite Abhandlung von Lagrange zu rechnen. Ferner gehört hieher eine Arbeit von Herrn K. von der Mühll: Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen, Borchardt's Journal, Bd. 69, pag. 264 bis 285. In dieser Abhandlung wird die allgemeine Aufgabe gelöst: Die Theile einer Ebene auf einer andern Ebene abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei, und dass ferner ein System paralleler Geraden in der abzubildenden Ebene durch ein System bestimmter Curven in der Bildebene abgebildet werde. Hierauf wird die allgemeine Methode auf den Fall angewandt, wo den Geraden ganz allgemein Curven zweiten Grades entsprechen sollen.

Eine etwas andere Stellung nehmen die Arbeiten von Herrn Siebeck ein: 1) Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen, Borchardt's Journal, Bd. 55, pag. 221 bis 253, 1857, und 2) Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen, Borchardt's Journal, Bd. 57, pag. 359 und Bd. 59, pag. 173, 1859—61. Eine Eigenthümlichkeit dieser Arbeiten besteht darin, dass bei den Abbildungen hauptsächlich die Frage erörtert wird: Welche Curve in der einen Ebene entspricht der reellen Axe in der andern Ebene? Insofern als es sich hier um Curven handelt und die Frage: Welcher Flächentheil der einen Ebene entspricht einem bestimmten Flächentheil der andern? in diesen Arbeiten noch nicht in den Vordergrund der Betrachtung tritt, nehmen diese beiden Aufsätze in der That eine Zwischenstellung ein zwischen der Kategorie von Abbildungsaufgaben, wo gegebenen Curvensystemen wieder Cur-

vensysteme von vorgeschriebener Eigenschaft entsprechen sollen und der unmittelbar folgenden Kategorie, wo es sich um Flächenabbildung unter bestimmten andern Bedingungen handelt.

An die letztere dieser Arbeiten schliesst sich dem Inhalte nach ein Aufsatz von E. Jochmann an: Zur Abbildung des Rechtecks auf der Kreisfläche, Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, XIV. Jahrgang, 6. Heft, pag. 532 bis 540. In dieser Abhandlung werden einige sehr interessante, einfache Eigenschaften entwickelt 1) derjenigen orthogonalen Curvensysteme, welche bei der conformen Abbildung eines Rechtecks auf die Fläche eines Kreises den Systemen von Geraden entsprechen, die den Rechteckseiten parallel sind, und 2) derjenigen orthogonalen Curvensysteme, welche für den Fall eines Quadrates den Systemen von Geraden entsprechen, die den Diagonalen desselben parallel sind.

Gleichzeitig und in Folge einer neuen Begründung der Theorie der Functionen complexen Arguments durch die Arbeiten von B. Riemann ist auch die Theorie der Abbildung in ein neues Stadium getreten, namentlich durch dessen Inauguraldissertation: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse (Göttingen 1851). Man könnte sagen, es sei dadurch die Theorie der Abbildung in unserem Sinne in den Dienst der Functionentheorie getreten, was insofern richtig ist, als dieser ebenfalls die Aufgabe zukommt, Functionen aus ihren Eigenschaften, also aus Bedingungen, wirklich darzustellen, so dass sich also die genannten beiden Disciplinen (wenn man sie als getrennte Disciplinen betrachten und nicht vielmehr die Theorie der Abbildung als einen Theil der Functionentheorie ansehen will)

gegenseitig unterstützen. Durch die Einführung der sogenannten Riemann'schen Flächen (Vergl. Art. 5 der genannten Dissertation) ist der Untersuchung mehrdeutiger Functionen, auf welche man auch bei Abbildungsaufgaben sehr häufig geführt wird, ein mächtiges Hülfsmittel erwachsen, das von Riemann selbst und nach ihm von vielen Andern mit grossem Erfolge angewandt worden ist. Ein wichtiges Hülfsmittel bei derartigen Untersuchungen bilden insbesondere diejenigen Abbildungen, welche durch Potenzen, deren Exponenten reell sind, vermittelt werden und welche besonders bei Verwandlungen von Theilen mehrblättriger Riemann'scher Flächen mit Windungspunkten in solche Flächengebiete, die keine Windungspunkte besitzen, Anwendung finden. (Vergl. a. a. O. Art. 14 und 15.)

In der erwähnten Dissertation Art. 21, pag. 29 beweist Riemann mit Hülfe des sogenannten Dirichlet'schen Principes den Satz: Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so aufeinander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der andern entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind; und zwar kann zu Einem innern Punkte und zu Einem Begrenzungspunkte der entsprechende beliebig gegeben werden; dadurch aber ist die eindeutige Beziehung der beiden Flächenstücke auf einander vollständig bestimmt. Im Art. 22, pag. 32 wird der Satz dahin erweitert, dass die Beschränkung auf ebene, einzelne Punkte ausgenommen, schlichte Flächen fallen gelassen und bemerkt wird, dass die Aufgabe, eine beliebig gegebene Fläche auf einer andern beliebig gegebenen in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, eine gänz ähnliche Behandlung gestatte.

Unter die in diesen Riemann'schen Sätzen ausgesprochenen Gesichtspunkte fallen demnach die Abbildungsaufgaben: a) Conforme Abbildung einer einfach zusammenhängenden ebenen Fläche mit vorgeschriebener Begrenzung auf eine einfach zusammenhängende ebene Fläche mit ebenfalls vorgeschriebener Begrenzung; b) conforme eindeutige Abbildung einer geschlossenen Fläche auf eine ebenfalls geschlossene Fläche.

Es mögen hier unter denjenigen Arbeiten, welche sich auf Abbildungsaufgaben der erstern Art beziehen, nach der Reihenfolge der Zeit ihrer Veröffentlichung Erwähnung finden:

E. B. Christoffel: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie; Annali di matematica, Brioschi e Cremona, Serie II, Tomo I, pag. 89—103, 1867. Herr Prof. Christoffel behandelt darin u. A. allgemein die Abbildung eines ebenen Polygons auf eine Ebene und als specielles Beispiel die Abbildung des Rechtecks.

H. A. Schwarz: Ueber einige Abbildungsaufgaben; Borchardt's Journal Bd. 70, pag. 105 bis 120. (Aus einer Mittheilung an Herrn Richelot in Königsberg.) Aus einer in der Abhandlang enthaltenen Bemerkung geht hervor, dass der grösste Theil der in dieser Abhandlung mitgetheilten Resultate, obwol, mit Ausnahme der conformen Abbildung der Kugeloberfläche auf die Fläche eines Würfels, erst im Jahre 1869 veröffentlicht, doch schon im Jahre 1864 gewonnen war und im Jahre 1866 der Berliner Akademie mitgetheilt worden ist.

In dieser Arbeit untersucht Herr Prof. Schwarz ausführlich die conforme Abbildung der Fläche eines Quadrates auf die Fläche eines Kreises und theilt die vollständige

Lösung für mehrere andere Abbildungsaufgaben mit. So wird z. B. ausser der Formel für die Abbildung eines speciellen Rechtecks auf die Fläche eines Kreises die Form derjenigen Functionen angegeben, durch welche die Fläche einer Halbebene auf die einfach zusammenhängende Fläche irgend eines ebenen, geradlinig begrenzten Polygons abgebildet wird mit der Bemerkung, dass diese Formel sich leicht auf den Fall ausdehnen lasse, wo das Innere des Polygons Windungspunkte oder den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält. Dabei wird besonderes Gewicht gelegt auf den Beweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung. Als Beispiel zu dieser allgemeinen Form wird die fertige Formel für die Abbildung des Aeussern eines Quadrates auf die Fläche eines Kreises mitgetheilt, womit zugleich die Wärmeaufgabe für das Aeussere eines Quadrates im Principe gelöst sei. Als einfache Beispiele von Abbildungen krummlinig begrenzter ebener Figuren werden angeführt die Formeln für die Abbildung des Innern der Fläche einer Parabel und des Innern der Fläche einer Ellipse auf das Innere eines Kreises. (Man vergleiche ebenfalls: H. A. Schwarz: Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren; Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, XV. Jahrgang, pag. 272 bis 286. Die Aufgabe: die Fläche einer Ellipse conform auf die Fläche eines Kreises abzubilden, findet sich von Herr Prof. Schwarz ausführlicher gelöst in den Annali di matematica, Serie II, Tomo III.) Im Fernern wird die Aufgabe der conformen Abbildung der Fläche eines von Kreisbogen gebildeten Polygons auf die Fläche einer Halbebene zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass im Innern des Kreisbogenpolygons Windungspunkte und der unendlich

ferne Punkt vorkommen; auch wird gezeigt, wie sich aus der Abbildung der Kreisfläche auf die Fläche eines geradlinigen n-Ecks die Abbildung einer Kugeloberfläche auf die beiden Seiten dieses n-Ecks ergibt. Der Schluss dieser Abhandlung bezeichnet den Weg, der einzuschlagen ist, um die Oberfläche irgend eines von ebenen Flächen gebildeten Euler'schen Polyeders auf die Oberfläche einer Kugel conform abzubilden. Hiebei wird aufmerksam gemacht auf die Schwierigkeiten, welche der strenge allgemeine Nachweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung darbiete. Als Beispiel einer Polyederabbildung wird die Formel für die conforme Abbildung der Kugeloberfläche auf die Oberfläche eines Würfels mitgetheilt. Dieses Beispiel findet sich ebenfalls in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1865, pag. 150, wo auch gezeigt wird, dass diese Abbildung nur von elliptischen Functionen abhängig ist und zwar von den lemniscatischen mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

H. Weber: Note über ein Problem der Abbildung; mathematische Annalen von Clebsch und Neumann Bd. II, 1. Heft. Diese Note enthält die Lösung der Aufgabe der Abbildung der Fläche einer Lemniscate auf die Fläche eines Kreises.

E. B. Christoffel: Sopra un problema proposto da Dirichlet; Annali di matematica Serie II^a, Tomo IV°, pag. 1 bis 9. In dieser Abhandlung wird die Aufgabe der conformen Abbildung einer Fläche auf die Ebene behandelt, welche von dem Aeussern irgend eines ebenen, einfach zusammenhängenden Bereiches (speciell eines ebenen Polygons) gebildet wird. Dasselbe Problem findet sich von Herrn Prof. Christoffel untersucht in der Abhandlung: Ueber

die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise; Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1870, pag. 284 bis 298.

Ueber diese Arbeiten vergleiche man den Nachtrag pag. 283 der bereits erwähnten Abhandlung von Herrn Prof. Schwarz: Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren, wo ausser einigen schon angeführten Beispielen über Abbildungsaufgaben die Lösungen für die Aufgabe der conformen Abbildung des Aeussern einer Parabelfläche und des Aeussern einer Ellipsenfläche auf die Fläche eines Kreises mitgetheilt werden.

G. Holzmüller: Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme; Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, XVI. Jahrgang, 4. Heft, pag. 270 bis 289. In dieser Abhandlung werden untersucht: Der allgemeine Charakter der logarithmischen Abbildung, die Eigenschaften der logarithmischen Spirale und Doppelspirale. In dem Abschnitt: Kartographische Anmerkungen wird auf den Zusammenhang hingewiesen, der besteht zwischen den sphärischen Kegelschnitten und den sogenannten Siebeck'schen Curven.

O. Hentschel: Ueber einige conforme Abbildungen; Inauguraldissertation, Jena 1871. In dieser Arbeit werden u. A. behandelt: Die Abbildung der Fläche einer Ellipse, der Fläche eines Rechtecks, der Fläche einer von einer Lemniscate begrenzten Figur auf die Fläche des Kreises und die Abbildung einer speciellen von Kreisbogen begrenzten Figur auf den Kreis.

Für die zweite der in dem Riemann'schen Satze in Aussicht genommenen Abbildungsarten finden sich Beispiele schon bei Lambert und Lagrange. In der ersten der

beiden oben angeführten Arbeiten von Gauss werden als Beispiele für die daselbst entwickelte Theorie behandelt die Abbildungen der Ebene, des geraden Kegels, der Kugel und des Rotationsellipsoides auf die Ebene und schliesslich die Abbildung des Rotationsellipsoides auf die Kugel.

Es mag hier auch erwähnt werden, dass Herr Liouville in der Note V: Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres zu dem Werke: Application de l'analyse à la géometrie par G. Monge. Nouvelle édition annotée par Liouville, Paris 1850, pag. 608 die Aufgabe stellt, die Oberfläche eines Ellipsoides auf die Ebene, auf die Fläche einer Kugel und auf die Fläche eines andern Ellipsoides conform abzubilden.

Während man schon längere Zeit Beispiele von Abbildungen krummer Oberflächen besass, so gehört der erste Fall der conformen Abbildung einer von ebenen Flächen begrenzten, einfach zusammenhängenden, geschlossenen Polyederoberfläche auf die Oberfläche einer Kugel der neuern Zeit an. Dieser Fall ist wohl zu finden in dem schon oben erwähnten Beispiel der conformen Abbildung der Kugeloberfläche auf die Oberfläche eines Würfels, für welche die Formel in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1865, pag. 150 veröffentlicht ist. An dieses Beispiel schliesst sich an die vom Jahre 1868 datirte, aber erst ein Jahr später veröffentlichte Abhandlung von Herrn Prof. Schwarz: Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel; Borchardt's Journal Bd. 70, pag. 121 bis 136, in welcher für diesen Fall der Nachweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung wirklich geführt wird. Den vollständigen Beweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung für den allgemeinsten Fall der Abbildung irgend

eines einfach zusammenhängenden, geschlossenen, von ebenen Flächen gebildeten Polyeders auf die Oberfläche einer Kugel, auf dessen Nothwendigkeit bei Anlass der Aufstellung der allgemeinen Formel für die Abbildung irgend eines Polyeders hingedeutet wurde (s. Ueber einige Abbildungsaufgaben, pag. 119) deutet Herr Prof. Schwarz auf pag. 282 der bereits mehrfach bei andern Gelegenheiten angeführten Abhandlung: Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren an und gibt die ausführliche Darlegung desselben im Art. 17, pag. 791 der Abhandlung: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen; Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom October 1870, pag. 767 bis 795.

II.

Die allgemeine Aufgabe, die Oberfläche eines gegebenen regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel conform abzubilden, lässt unendlich viele Lösungen zu. Es reicht jedoch zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe die Kenntniss einer einzigen Lösung hin, da aus einer einzigen Lösung jede andere dadurch erhalten werden kann, dass man die Oberfläche derjenigen Kugel, auf welche die Octaederoberfläche abgebildet worden ist, conform auf die Oberfläche einer zweiten Kugel von gleichem Radius abbildet, welche Abbildung bekanntlich in allgemeinster Weise durch reciproke Radien bewirkt werden kann.

Die Eckpunkte des gegebenen Octaeders seien mit (A), (B), (C), (D), (E), (F) bezeichnet, ihre entsprechenden Punkte auf der Oberfläche der Kugel, deren Radius gleich

der Längeneinheit sei, beziehungsweise mit (a), b, c, d, e, (f). Die vier Punkte (B), (C), (D), (E) mögen in einer Symmetrieebene des Octaeders, (A) und (F) also in der auf dieser Ebene senkrechten Axe liegen. Es liegt nun die Vermuthung nahe, dass unter den unendlich vielen möglichen Abbildungen auch eine solche sich befinden werde, bei welcher den Punkten (A) und (F) die Pole (a) und (f) eines grössten Kreises entsprechen, auf dessen Peripherie sich die Punkte b, c, d, e so vertheilen, dass je zwei aufeinanderfolgende einen Quadranten begrenzen. (S. Fig. 1 und Fig. 2). (Zur Veranschaulichung kann man sich denken, die Octaederoberfläche werde durch eine dünne Haut materiell repräsentirt, welche die Eigenschaft hätte, beim Zusammenziehen oder Ausdehnen den kleinsten Theilen irgend einer ganz im Innern einer Begrenzungsfläche verzeichneten Figur ihre Aehnlichkeit zu belassen; im Innern dieses Octaeders befinde sich eine Kugel, welche mit dem Octaeder concentrisch sei, und nun ziehe sich die Haut so zusammen, dass sie sich nach und nach fest an die Kugelfläche anlege, ohne irgend welche Falten zu bilden oder zu zerreissen).

Wir stellen uns zuerst die Aufgabe, die Oberfläche der Kugel conform auf die Oberfläche des Octaeders abzubilden. Zur Lösung derselben schlagen wir genau den von Herrn Prof. Schwarz in seiner Abhandlung: Ueber einige Abbildungsaufgaben, Borchardt's Journal Bd. 70 auf pag. 119 angegebenen Weg ein.

Wir denken uns durch eine Transformation mittelst reciproker Radien mit dem Transformationscentrum (f) die Kugelfläche auf die Ebene der Punkte b, c, d, e, die wir als Gebiet der unbeschränkt veränderlichen complexen Variablen x mit X bezeichnen wollen, abgebildet. Dabei

entsprechen sich die Punkte b, c, d, e selbst, a, der entsprechende zu (a), kommt in den Mittelpunkt des Kreises $b\ c\ d\ e$ und f, der entsprechende zu (f), rückt in's Unendliche. (S. Fig. 2 und Fig. 3.) Ferner breiten wir in einer zweiten Ebene U (Fig. 4), in welcher die Werthe der complexen Variablen u geometrisch dargestellt werden, das Netz (U) der Oberfläche des gegebenen Octaeders aus, zu welchem Behufe wir uns vorstellen, dass die Oberfläche des Octaeders längs der Kanten $(A)(B)$, $(B)(C)$, $(B)(E)$, $(B)(F)$ und $(E)(D)$ aufgeschnitten sei. Dieser Zerschneidung entspricht eine analoge Zerschneidung der Ebene X von a nach b und von b in's Unendliche geradlinig und in derselben Richtung, dagegen von b nach c, von b nach e und endlich von e nach d längs des Kreises $b\ c\ d\ e$. Die so entstandene einfach zusammenhängende Fläche, deren Begrenzung von den beiden Ufern der Schnitte gebildet wird, werde mit (X) bezeichnet. Dadurch ist nun unsere Aufgabe zurückgeführt auf die andere: Die Ebene X so auf die Ebene U abzubilden, dass jedem bestimmten Punkte innerhalb des Bereiches (X) ein einziger bestimmter, stetig mit jenem Punkte fortrückender Punkt innerhalb des Bereiches (U) entspreche, und dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei. Die letztere Bedingung kann natürlich nicht aufrecht erhalten werden für die Eckpunkte des Octaeders, also auch nicht für die Punkte a, b, c, d, e, ∞ der Begrenzung von (X), welche nach unserer Annahme den Punkten A, B, C, D, E, F des Netzes (U) entsprechen; dagegen muss verlangt werden, dass auch in diesen Punkten die Abbildung stetig sei. In der Sprache der Analysis heisst das: Die Function $u = F(x)$, welche die Abbildung vermittelt, muss überall im Innern von (X) den Charakter einer ganzen Function ha-

ben und in den Punkten $x = a$, $x = b$ u. s. f. und im Punkte $x = \infty$ stetig bleiben.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften der die Abbildung vermittelnden Function näher, um mit Hülfe derselben zu einer analytischen Darstellung dieser Function zu gelangen. Der durch die beiden Ufer des Schnittes ab gebildete Winkel von 360^0 soll abgebildet werden auf einen Winkel von 240^0. Die einfachste Function, welche eine solche Abbildung leistet, ist

$$u - u_a = (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

Jede andere Function, welche eine Abbildung vermittelt, die in der Umgebung des Punktes a dieselbe Eigenschaft besitzt, wird aus $(x - a)^{\frac{2}{3}}$ durch Multiplication mit $[1 + \mathfrak{P}_a(x - a)]$ erhalten, wo unter $\mathfrak{P}_a(x - a)$ eine nach steigenden, ganzen, positiven Potenzen von $(x - a)$ fortschreitende Potenzreihe verstanden ist, welche in der Umgebung des Punktes a convergirt. (Vergleiche pag. 109 der genannten Abhandlung von Herrn Prof. Schwarz.) Demnach muss die gesuchte Function in der Umgebung des Punktes $x = a$ eine Entwicklung besitzen von der Form:

$$u - u_a = C_a(x - a)^{\frac{2}{3}} [1 + \mathfrak{P}_a(x - a)],$$

wo C_a eine Constante bedeutet. Aus Figur 4 erhellt, dass man für die Function in den Umgebungen der Punkte c und d auf gleiche Weise die Entwicklungen erhalten wird:

$$u - u_c = C_c(x - c)^{\frac{2}{3}} [1 + \mathfrak{P}_c(x - c)] \text{ und}$$

$$u - u_d = C_d(x - d)^{\frac{2}{3}} [1 + \mathfrak{P}_d(x - d)].$$

Dagegen möchte es erscheinen, als ob das Verhalten der Function in den Umgebungen der Punkte b und e ein

anderes wäre, als in der Nähe der Punkte a, c, d. Da jedoch bei der Netzbildung die Art der Zerschneidung unwesentlich ist, so erkennt man, dass man in den Umgebungen der Punkte b und e den vorigen ganz analoge Entwicklungen für die Function erhalten wird. Der unendlich ferne Punkt f endlich spielt eine ähnliche Rolle, wie jeder andere singuläre Punkt. In der That konnte bei der Abbildung der Kugeloberfläche auf die Ebene X durch reciproke Radien ebensowol jeder andere singuläre Punkt zum Transformationscentrum und die zu der Axe durch diesen Punkt senkrechte Symmetrieebene zur Bildebene gewählt werden. In der Umgebung des unendlich fernen Punktes hat demnach die gesuchte Function eine Entwicklung von der Form:

$$u - u_\infty = C_\infty \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \left[1 + \mathfrak{P}_\infty\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Die hier additiv auftretenden Constanten u_a, u_b . . . . u_∞ entfernen wir durch Differentiation, wodurch wir erhalten:

$$\frac{du}{dx} = C'_a(x-a)^{-\frac{1}{3}}\,[1 + \mathfrak{P}'_a(x-a)]$$

$$\frac{du}{dx} = C'_b(x-b)^{-\frac{1}{3}}\,[1 + \mathfrak{P}'_b(x-b)]$$

. . .

. . .

. . .

$$\frac{du}{dx} = C'_\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \left[1 + \mathfrak{P}'_\infty\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

worin die Constanten C'_a, C'_b u. s. f. sich von C_a, C_b u. s. f. nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden und die Potenzreihen $\mathfrak{P}'_a$, $\mathfrak{P}'_b$ u. s. f. ähnliche Bedeutung haben, wie die Reihen $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$ u. s. f. Durch Erheben in die dritte Potenz ergibt sich:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 = \frac{C_a'^3}{x-a}\left[1 + \mathfrak{P}_a''(x-a)\right]$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 = \frac{C_b'^3}{x-b}\left[1 + \mathfrak{P}_b''(x-b)\right]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 = \frac{C_\infty'^3}{x^5}\left[1 + \mathfrak{P}_\infty''\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

woraus wir sehen, dass $\left(\frac{du}{dx}\right)^3$ eine rationale Function von x sein wird, welche in den Punkten $x = a$ bis $x = e$ von der ersten Ordnung unendlich gross und in dem Punkte $x = \infty$ von der fünften Ordnung unendlich klein wird. Nach einem bekannten Satze aus der Functionentheorie ist der Quotient aus dieser Function und irgend einer andern rationalen Function, welche ausschliesslich für dieselben Werthe des Arguments und beziehungsweise von gleicher Ordnung unendlich klein und unendlich gross wird, eine Constante. Wir werden folglich setzen dürfen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 = \frac{C^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}$$

und daher

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}}$$

$$u - u_0 = C\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}}$$

Die Anfangspunkte der Coordinatensysteme in den Ebenen X und U mögen nun in die Punkte a, resp. A verlegt werden.

Obschon es an und für sich gleichgültig ist, wie die Punkte b, c, d, e auf dem Einheitskreise vertheilt werden,

wenn sie nur die Ecken eines Quadrates bilden und in richtigem Sinne aufeinander folgen, so scheint es doch, dass die Formeln durch folgende specielle Annahmen etwas an Einfachheit gewinnen:

$$a = 0,\ b = -\sqrt{i},\ c = \sqrt{-i},\ d = \sqrt{i},\ e = -\sqrt{-i},$$

wobei wir unter $\sqrt{i}$ immer die Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ und unter $\sqrt{-i}$ die Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$ verstehen wollen. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich

$$u - u_0 = C\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}.$$

Zur Vereinfachung werde angenommen, es sei die Länge der Octaederkante so gewählt, dass der Constanten C der Werth $+1$ zukommt, wodurch zugleich reellen Werthen von x reelle Werthe von u zugeordnet werden, indem wir uns vorbehalten, später durch geeignete Abänderung unsern Resultaten die nöthige Allgemeinheit zu ertheilen. Die zu untersuchende Function ist nun:

$$u - u_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}.$$

Wir haben nun nachzuweisen, dass diese Function allen den an sie gestellten Forderungen genügt, d. h. für jeden Punkt innerhalb des Gebietes (X) den Charakter einer ganzen Function und in den singulären Punkten selbst Entwicklungen von der angegebenen Form besitzt.

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}.$$

Nach dem binomischen Satze ist:

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^8 - \frac{14}{81}x^{12} \ldots\ldots$$

also

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left[1 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^8 - \frac{14}{81}x^{12} \ldots\ldots\right]$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{1}{21}x^4 + \frac{2}{117}x^8 - \frac{14}{1539}x^{12} \ldots\ldots\right]$$

Demnach besitzt die betrachtete Function für die Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung:

$$u = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{1}{21}x^4 + \frac{2}{117}x^8 - \ldots\ldots\right]$$

Auf ähnliche Weise oder auch mit Anwendung des Taylor'schen Satzes erhalten wir als Entwicklung für die Umgebung von $x = +\sqrt{i}$:

$$u - u_a = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x-\sqrt{i})^{\frac{2}{3}}\left[1 + \frac{i\sqrt[3]{i}}{3}(x-\sqrt{i}) - \frac{5i}{36}(x-\sqrt{i})^2 \ldots\right],$$

als Entwicklung für die Umgebung von $x = -\sqrt{i}$:

$$u - u_b = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+\sqrt{i})^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{i\sqrt[3]{i}}{3}(x+\sqrt{i}) - \frac{5i}{36}(x+\sqrt{i})^2 \ldots\right],$$

als Entwicklung für die Umgebung von $x = \infty$:

$$u - u_f = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\left[1 - \frac{1}{21}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{117}\frac{1}{x^8} - \frac{14}{1539}\frac{1}{x^{12}} \ldots\right]$$

Ein Zweig der zu integrirenden Function kann für das Innere des Bereiches (X) eindeutig als stetige Function von x erklärt werden, sobald zu einem einzigen Werthe von x ein zugehöriger Functionswerth fixirt ist. Die beiden andern Zweige der Function unterscheiden sich von dem-

selben durch einen der Factoren $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ und $e^{\frac{4}{3}\pi i}$. Da diese Function für keinen Werth von x unendlich gross von der ersten oder einer höhern Ordnung wird und für unendlich grosse Werthe von x von einer höhern Ordnung unendlich klein wird als der ersten, so schliessen wir, dass das Integral u zu den Integralen erster Art gehört, d. h. zu denjenigen, welche stets endlich bleiben und dass daher auch ein Zweig u der Integralfunction innerhalb des Gebietes (X) eindeutig erklärt werden kann. Die beiden andern Zweige u_1 und u_2 der Integralfunction werden aus u erhalten durch die Gleichungen:

$$u_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i} . u + \text{Const.}$$

$$u_2 = e^{\frac{4}{3}\pi i} . u + \text{Const.}$$

Vorläufig beschäftigen wir uns nur mit einem Zweige der Integralfunction und haben nun im Weitern zu zeigen, dass die conforme Abbildung der Ebene (X) auf den Theil (U) der Ebene U, welche durch die Function $u = F(x)$ vermittelt wird, genau so beschaffen ist, wie diess die gestellte Aufgabe erfordert.

Wir lassen in $\int_0^{\sqrt{i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}$ x sich geradlinig bewegen vom Punkte a bis zum Punkte d, also längs einer Geraden, deren Neigung gegen die positive reelle Axe 45° beträgt. (Ist der Integrationsweg eine Gerade, so versehen wir das Integralzeichen mit einer Marke $'f$). Setzen wir $x = v(1 + i)$, wo nun v eine reelle Variable bedeutet, welche sich von $v = 0$ bis $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bewegt, so erhalten wir:

$$\int_0^{\sqrt{i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = (1+i)^{\frac{2}{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{\sqrt[3]{v(1-4v^4)}} = (1+i)^{\frac{2}{3}} A.$$

wenn wir noch $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{\sqrt[3]{v(1-4v^4)}}$ mit A bezeichnen. Sehen wir von dem constanten Factor $(1+i)^{\frac{2}{3}}$ ab, so hat das Integral $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{\sqrt[3]{v(1-4v^4)}}$ nur reelle Elemente; wir erkennen daraus, dass der den Werth des Integrales geometrisch darstellende Punkt u sich geradlinig bewegt, und zwar entspricht der Strecke $a\bar{d}$, welche x durchläuft, in der Ebene U eine Strecke, deren Länge $2^{\frac{1}{3}} A$ beträgt. Auf ähnliche Weise finden wir

$$\int_0^{-\sqrt{-i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = (-1+i)^{\frac{2}{3}} A$$

$$\int_0^{-\sqrt{i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = (1+i)^{\frac{2}{3}} A$$

$$\int_0^{\sqrt{-i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = (1-i)^{\frac{2}{3}} A$$

Alle diese Integrale haben denselben absoluten Betrag $2^{\frac{1}{3}} A$, und es kann sich nur noch fragen, welche Werthe den Coefficienten von A, die sämmtlich dritte Wurzeln sind,

zukommen sollen. Da das Verhalten der Function u hinsichtlich des Zusammenhanges der verschiedenen Zweige in der Umgebung des Nullpunktes dasselbe ist, wie dasjenige der Function $u = x^{\frac{2}{3}}$, so hat man die Wahl so zu treffen, dass die Geraden AC, AD und AE den von AB_2 und AB_1 gebildeten Winkel in vier Winkel von je 60° theilen.

Um zu zeigen, dass derjenige Theil der Begrenzung von (U), welcher das Integral $\int_{-\sqrt{i}}^{\prime\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}$ geometrisch darstellt und somit der Linie bf_∞ in der Ebene X entspricht, die gegen die positive relle Axe um einen Winkel von 225° geneigt ist, ebenfalls geradlinig und von der Länge $2^{\frac{1}{3}} A$ ist, führen wir eine Transformation mittelst reciproker Radien aus durch die Substitution $x = -\frac{1+i}{2z}$. Die complexe Grösse z bewegt sich dann auf der reellen Axe von $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bis 0, und wir erhalten:

$$\int_{-\sqrt{i}}^{\prime\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = -(1+i)^{\frac{2}{3}} \int_0^{\prime\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{\sqrt[3]{z(1-4z^4)}} = -(1+i)^{\frac{2}{3}} A.$$

Es bewegt sich demnach u in der That geradlinig.

Ebenfalls mittelst einer Transformation durch reciproke Radien können wir nachweisen, dass, wenn sich der die complexe Variable x geometrisch darstellende Punkt z. B. auf dem Einheitskreise von $\sqrt{i}$ bis $-\sqrt{-i}$ bewegt, der zugehörige Punkt in der Ebene U eine Gerade von der Länge

$2^{\frac{1}{3}}A$ beschreibt. Es wird nämlich durch die Substitution $v = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{x - \sqrt{i}}{x + \sqrt{i}}$ oder $x = \sqrt{i}\, \frac{1 + \sqrt{i}\, v}{1 - \sqrt{i}\, v}$ das Integral $\int_{+\sqrt{i}}^{-\sqrt{-i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}$ übergeführt in $-i^{\frac{2}{3}} \int_0^{\sqrt{i}} \frac{dv}{\sqrt[3]{v(1+v^4)}}$, und da hierbei der kreisförmige Integrationsweg in einen geradlinigen übergegangen ist, so ergibt sich als Werth dieses Integrales:

$$-i^{\frac{2}{3}} \int_0^{\sqrt{i}} \frac{dv}{\sqrt[3]{v(1+v^4)}} = -i^{\frac{2}{3}}(1+i)^{\frac{2}{3}}A = -(-1+i)^{\frac{2}{3}}A.$$

Auf ganz ähnliche Weise können wir zeigen, dass, wenn sich der die complexe Variable x geometrisch darstellende Punkt längs der Viertelskreise eb und bc bewegt, dann der zugeordnete Punkt in der Ebene U geradlinige Strecken von der Länge $2^{\frac{1}{3}}A$ beschreibt.

Ueber die Wahl der Werthe, welche den Coefficienten von A beizulegen sind, kann nach einem bereits angeführten Grunde in keinem Falle Zweifel entstehen.

Aus dem bisher Entwickelten geht hervor, dass, falls man nur einen Zweig der Function u in Betracht zieht, dem Innern des einfach zusammenhängenden Bereiches (X) das Innere von (U) und der Begrenzung von (X) genau die Begrenzung von (U) Punkt für Punkt entspricht. Stellt man daher aus dem Netz (U) das Octaeder wieder her und bildet die Ebene (X) wieder auf die Kugeloberfläche ab, so ist auf diese Weise die Oberfläche der Kugel auf die Oberfläche des Octaeders so abgebildet, dass überall mit Ausnahme der den Ecken des Octaeders entsprechenden

Punkten Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen stattfindet und auch in diesen Ausnahmepunkten die Stetigkeit der Abbildung nicht unterbrochen wird. Bei näherer Betrachtung ergibt sich auch, dass der Zusammenhang zwischen solchen Flächentheilen, deren unmittelbarer Zusammenhang durch die frühere Zerschneidung aufgehoben wurde, in entsprechenden Punkten wieder hergestellt wird.

Jetzt handelt es sich noch darum, die erhaltene Function umzukehren, um auch umgekehrt, wie die Aufgabe es verlangt, zu jedem gegebenen Punkte der Octaederoberfläche den entsprechenden Punkt der Kugeloberfläche zu finden. Zu diesem Zwecke setzen wir die Betrachtung der Function u noch etwas weiter fort, indem wir von nun an nicht mehr blos einen einzigen Zweig von u verfolgen, sondern die Function in ihrer Allgemeinheit in den Kreis unserer Untersuchung ziehen.

Alle Werthe, die u auf verschiedenen Integrationswegen überhaupt erlangen kann, werden aus einem derselben durch Abwicklung der Octaederoberfläche in der Ebene U erhalten. Man kann nun gewissermassen auf experimentellem Wege hinsichtlich der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden veränderlichen Grössen u und x bei unbeschränkter Veränderlichkeit derselben eine vorläufige Untersuchung anstellen, indem man ein materielles reguläres Octaeder wiederholt auf einer ebenen Zeichnungsfläche (der Ebene U) abrollt, die in ein System von gleichseitigen, den Seitenflächen des Octaeders congruenten Dreiecken eingetheilt ist. (Vergleiche Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1865, pag. 150.) Die hierbei sich ergebende Anordnung derjenigen Punkte der Ebene, mit welchen derselbe Punkt der Octaederoberfläche zusammenfallen kann, zeigt eine deutliche Periodici-

tät (Fig. 5); diess führt zu dem Schlusse, dass x eine doppelt periodische Function von u sein wird. Für die Wahl der Periodenparallelogramme, welche durch die längern Diagonalen der durch je zwei aufeinanderfolgende gleichseitige Dreiecke in der Ebene U entstehenden Parallelogramme gebildet werden, sind mehrere Möglichkeiten vorhanden. Wir halten für die weitere Untersuchung die in Fig. 5 getroffene Anordnung fest. Aus dem Umstande, dass während der Operation des Abwickelns ein und dasselbe Dreieck der Zeichnungsfläche nur von vier verschiedenen Octaederflächen bedeckt werden kann, schliessen wir, dass x eine vierdeutige Function von u sein wird; umgekehrt wird, von Perioden abgesehen, die Grösse u eine dreideutige Function von x sein, da einem und demselben Punkte der Octaederoberfläche drei im Allgemeinen von einander verschiedene Punkte u innerhalb eines Periodenparallelogrammes entsprechen.

Hiernach ist der in der folgenden Untersuchung einzuschlagende Weg vorgezeichnet. Führen wir nämlich eine eindeutige, doppelt periodische Function von u ein, welche dieselben Perioden besitzt, wie die Function x, so muss zwischen dieser und der Grösse x eine algebraische Gleichung bestehen. Vermittelst dieser algebraischen Gleichung wird es gelingen, das bisher betrachtete Integral in eine der gebräuchlichen Normalformen der elliptischen Integrale erster Art zu transformiren.

Es sei $$x = f(u).$$

Einem bestimmten Werthe $u = u_0$ entsprechen vier Werthe von x, welche mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet werden mögen. Einem Punkte der Ebene U entsprechen demnach auch vier Punkte der Kugeloberfläche, deren gegenseitige Lage leicht zu erkennen ist. Bildet man die Kugeloberfläche wieder

auf die Ebene X ab, so folgt aus geometrischen Gründen bei geeigneter Bezeichnung der vier Wurzeln 1) dass $x_2 = -x_1$ und $x_4 = -x_3$, 2) dass $x_3 = \frac{i}{x_1}$ ist (Siehe Fig. 6). Die Function $x^2 = [f(u)]^2$ wird mithin eine zweideutige, doppelt periodische Function, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ dagegen eine eindeutige, doppelt periodische Function von u sein.

Setzen wir also $x^2 - \frac{1}{x^2} = r$, so wird

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{r+2i} + \sqrt{r-2i}), \quad dx = \frac{dr}{4} \cdot \frac{\sqrt{r+2i} + \sqrt{r-2i}}{\sqrt{r^2+4}}$$

und

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{1}{2} \frac{dr}{(r^2+4)^{\frac{2}{3}}}.$$

Machen wir ferner die Substitution

$$r^2 + 4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = t,$$

also $$r = \sqrt{t-4}, \quad dr = \frac{dt}{2\sqrt{t-4}},$$

so bekommen wir:

$$\frac{1}{2} \frac{dr}{(r^2+4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4} \frac{dt}{\sqrt{t-4} \cdot t^{\frac{2}{3}}}.$$

Durch die Substitution $t = v^3$, $dt = 3t^{\frac{2}{3}}\, dv$ erhalten wir endlich

$$\frac{1}{4} \frac{dt}{\sqrt{t-4} \cdot t^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{4} \frac{dv}{\sqrt{v^3-4}}.$$

Die Bestimmung des Vorzeichens, welches diesem letztern Ausdruck zukommt, soll an der Stelle stattfinden, wo von diesem Transformationsresultat Gebrauch gemacht werden wird.

Hiemit wären also durch analytische Rechnungen die Vermuthungen, welche zunächst aus geometrischen Beziehungen sich darboten, bestätigt.

Vorerst beschäftigen wir uns mit der Darstellung der eindeutigen, doppelt periodischen Function r.

Es ist $r = x^2 - \frac{1}{x^2}$. Diese Function wird unendlich gross für $x = 0$ und $x = \infty$ und gleich Null für die vier Werthe $x = \pm 1$ und $x = \pm i$. Es frägt sich nun, von welcher Ordnung r unendlich gross und gleich Null wird, wenn wir r nicht als Function von x, sondern als Function von u betrachten, x also durch u ausdrücken oder mit andern Worten das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}$ umkehren.

Dass dieses Integral auch bei unbeschränkter Variabilität von x sich umkehren lässt, geht aus der obigen Transformation, durch welche dasselbe in ein elliptisches Integral erster Art übergeführt wurde, hervor. Um das Verhalten dieser Function in den den Punkten $x = 0$, $x = \infty$, $x = \pm 1$, $x = \pm i$ entsprechenden Punkten u kennen zu lernen, entwickeln wir r in den Umgebungen dieser Punkte.

1. Entwicklung für die Umgebung des Punktes $x = 0$.

Dem Punkte $x = 0$ entspricht der Punkt $u = 0$. Nun hatten wir die Entwicklung:

$$u = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} [1 - \frac{1}{21} x^4 + \frac{2}{117} x^8 - \ldots\ldots]$$

Daraus folgt, wenn wir die Entwicklung auf die ersten Glieder beschränken, was für den gegenwärtigen Zweck hinreicht:

$$\frac{2}{3}u = x^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{1}{21}x^4\right]$$

$$\left(\frac{2}{3}u\right)^{\frac{3}{2}} = x\left[1 - \frac{1}{14}x^4\right]$$

und umgekehrt

$$x = \left(\frac{2}{3}u\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{1}{14}\left(\frac{2}{3}u\right)^6\right].$$

Darnach wird $x^2 = \left(\frac{2}{3}u\right)^3\left[1 + \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}u\right)^6\right]$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}u\right)^3}\left[1 - \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}u\right)^6\right];$$

folglich $r = x^2 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}x\right)^3} + \frac{8}{7}\left(\frac{2}{3}u\right)^3$

oder $r = -\frac{27}{8}\frac{1}{u^3} + \frac{8}{7}\cdot\frac{8}{27}u^3 + \ldots.$

2. Entwicklung für die Umgebung des Punktes $x = \infty$.

Es entspreche dem Punkte $x = \infty$ der Punkt $u = u_\infty$. Dann findet sich auf gleiche Weise aus der Entwicklung

$$u - u_\infty = -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\left[1 - \frac{1}{21}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{117}\frac{1}{x^8} \ldots\ldots\right]$$

$$r = -\frac{27}{8}\frac{1}{(u-u_\infty)^3} + \frac{8}{7}\cdot\frac{8}{27}(u-u_\infty)^3 \ldots\ldots$$

3. Entwicklung für die Umgebung des Punktes $x = 1$.

Es entspreche dem Punkte $x = 1$ der Punkt $u = u_1$. Nach dem Taylor'schen Satze findet sich:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x-1) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}(x-1)^2 \ldots$$

und hieraus

$$u - u_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x-1)\left[1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 \ldots\right]$$

Kehrt man diese Reihe auf ähnliche Weise um, wie es bei den vorhergehenden geschehen ist, so erhält man:

$$r = 4\sqrt[3]{2}\,(u - u_1) + \ldots\ldots$$

Auch für die Umgebungen der den Punkten $x = -1$, $x = \pm i$ entsprechenden Punkte u_{-1}, u_i und u_{-i} ergeben sich Entwicklungen von der Form

$$u - u_{-1} = C_{-1}(u - u_{-1}) + \ldots\ldots \text{ u. s. f.}$$

Aus diesen Entwicklungen ersehen wir, dass r in den Punkten $u = 0$ und $u = u_\infty$ von der dritten Ordnung unendlich gross und in denjenigen Punkten u, welche den vier Wurzeln $\sqrt[4]{+1}$ entsprechen, von der ersten Ordnung unendlich klein wird. Wir müssen nun auch noch wissen, in welchen Punkten des Periodenparallelogramms diejenigen Werthe von u liegen, für welche die Function r die Werthe 0 und ∞ annimmt. Suchen wir z. B. die Lage des Punktes u_i auf.

Lassen wir x in dem Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}$ längs der positiven imaginären Axe von 0 bis i gehen, so findet sich, wenn wir $x = iy$ setzen, wo y eine reelle Variable ist

$$\int_0^{,i} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = i\int_0^{,1} \frac{dy}{\sqrt[3]{iy(1+y^4)}} = i^{\frac{2}{3}} \int_0^{,1} \frac{dy}{\sqrt[3]{y(1+y^4)}}.$$

Da dieses letztere Integral nur reelle Elemente besitzt, so bewegt sich u in einer geraden Linie, welche wegen des Factors $i^{\frac{2}{3}}$ um 60° gegen die positive reelle Axe geneigt ist. (Insofern wir nämlich denjenigen Zweig der Function u in's Auge fassen, welcher der Figur 4 zu Grunde gelegt ist.) Lassen wir x sich nur innerhalb des Gebietes (X) bewegen, so ist nach dem Cauchy'schen Satze

$$\int_0^{,i} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \int_0^{,\sqrt{i}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} + \int_{\sqrt{i}}^{i} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}},$$

wobei als Integrationsweg für das letztere Integral das Stück des Einheitskreises von $\sqrt{i}$ bis i gewählt werden möge. Daraus geht hervor, dass der Punkt u_i die in Fig. 4 angedeutete Lage haben wird.

Auf ähnliche Weise gelangen wir zu der Einsicht, dass die Function r für sämmtliche Punkte auf den Mitten der Seiten unserer Periodenparallelogramme verschwindet. Ferner ergibt sich, dass diese Function unendlich gross wird für sämmtliche Ecken der Periodenparallelogramme; denn sowol dem Punkte $x = 0$, als auch dem Punkte $x = \infty$ entsprechen Ecken eines Periodenparallelogramms.

Die Seiten der Periodenparallelogramme mögen mit $2\omega_1$ und $2\omega_3$ bezeichnet werden, wo

$$2\omega_1 = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}, \quad 2\omega_3 = 2\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}}.$$

Durch die Substitution $x = -\frac{1}{z}$ geht

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} \text{ über in } (1)^{\frac{1}{3}} \int_1^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[3]{z(1+z^4)}}.$$

Nun ist aber

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}};$$

demnach sind die absoluten Beträge von ω_1 und ω_3 einander gleich, also

$$[\omega_1] = [\omega_3];$$

ω_3 unterscheidet sich von ω_1 nur durch den Factor $\sqrt[3]{1}$. Wir treffen die Festsetzung, dass

$$\omega_3 = \omega_1 \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \text{ sei.}$$

Definiren wir noch ω_2 durch die Gleichung:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

so sind ω_1, ω_2, ω_3 gerade solche Werthe von u, für welche die Function r verschwindet, und $u = 0$ ist derjenige Punkt eines Periodenparallelogramms, für welchen r unendlich gross wird (Fig. 7).

Jetzt sind wir im Stande, die eindeutige, doppelt periodische Function r durch einen Quotienten von σ-Produkten darzustellen. Wird mit $a_1, a_2 \ldots a_\mu$ ein vollständiges System nicht äquivalenter Werthe bezeichnet, für welche die eindeutige, doppelt periodische Function $f(u)$ verschwindet, mit $b_1, b_2 \ldots b_\nu$ ein vollständiges System nicht äquivalenter Werthe, für welche $f(u)$ unendlich gross wird; sind ferner die bezüglichen Ordnungszahlen für das Verschwinden $m_1, m_2 \ldots m_\mu$ und für das Unendlichgrosswerden $n_1, n_2 \ldots n_\nu$, so gibt die Theorie

der elliptischen Functionen für die Darstellung der Function $f(u)$ die Formel:

$$f(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-a_1)^{m_1}\ \sigma(u-a_2)^{m_2}\ \ldots.\ \sigma(u-a_\mu)^{m_\mu}}{\sigma(u-b_1)^{n_1}\ \sigma(u-b_2)^{n_2}\ \ldots.\ \sigma(u-b_\nu)^{n_\nu}} \cdot e^{C_1 \cdot u},$$

wo C und C_1 Constanten bedeuten.

Die von Herrn Weierstrass in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführte Function $\sigma(u)$ ist eine nicht periodische Function, die für sämmtliche Ecken eines Systems von Periodenparallelogrammen verschwindet, welches in unserem Falle identisch ist mit demjenigen System von Periodenparallelogrammen, welches aus der Periodicität der Function x entspringt. Bezeichnet man die Zahlen, welche durch die Ecken dieser Parallelogramme repräsentirt werden, allgemein mit w, so dass also z. B. $w_{m,n} = m w_1 + n w_3 = 2(m\omega_1 + n\omega_3)$, wo den Zahlen m und n alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe, einschliesslich der Null, beizulegen sind, so ist die Function $\sigma(u)$ definirt durch das unendliche Doppelprodukt

$$\sigma(u) = u \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\ ^{1}),$$

(wo wir durch Π' andeuten, dass bei der Produktbildung derjenige Factor auszunehmen sei, der aus

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

---

[1]) Man vergleiche die Abhandlung von Herrn G. Frobenius: Ueber die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten; Borchardt's Journal Bd. 73, pag. 12 ff.

dadurch hervorgeht, dass man $w = 0$ setzt.) Diese Function lässt folgende Entwicklung in eine beständig convergirende Reihe zu:

$$\sigma(u) = u\left[1 - \frac{g_2 u^4}{16.3.5} - \frac{g_3 u^6}{8.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^8}{2^9.9.5.7} - \frac{g_2 g_3 u^{10}}{2^8.9.25.7.11} - \ldots\right]$$

Hierin sind g_2 und g_3 Constanten, welche mit den Zahlen w in folgendem Zusammenhang stehen:

$$2^2.3.5\,\Sigma'\left(\frac{1}{w^4}\right) = g_2,\quad 2^2.5.7\,\Sigma'\left(\frac{1}{w^6}\right) = g_3,$$

wo wir durch Σ' ausdrücken, dass bei der Summation der Werth $w = 0$ auszunehmen sei.

Bezeichnet man $\frac{\sigma'(\omega_\lambda)}{\sigma(\omega_\lambda)}$ mit η_λ, wo $\lambda = 1, 2, 3$, so ist in Folge der bekannten Beziehungen

$$\omega_1\eta_2 - \eta_1\omega_2 = \omega_2\eta_3 - \eta_2\omega_3 = \omega_3\eta_1 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

$$\sigma(u + 2\omega_\lambda) = -e^{2\eta_\lambda(u+\omega_\lambda)}\,\sigma(u)$$

die Grösse $D = \Sigma(nb) - \Sigma(ma)$ eine vollständige Periode der doppelt periodischen Function $f(u)$, wenn die Zahlen a, b, m, n die oben angegebene Bedeutung haben. Durch geeignete Veränderung einzelner der Grössen a und b kann man bewirken, dass $D = 0$ und damit auch $C_1 = 0$ wird. Durch die Einführung der Relation $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ wird dieser letztere Fall für die Function r herbeigeführt. Demnach ist

$$r = C\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{[\sigma(u)]^3}.$$

Für die weitere Untersuchung führen wir die doppelt periodische, eindeutige Function $\wp(u)$ ein, welche definirt ist sowol durch

$$\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = -\wp(u)$$

als auch durch

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}; \quad s = \wp(u). \quad [1])$$

Die Perioden dieser Function sind $2\omega_1$, $2\omega_2$ und $2\omega_3$, wo $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Sind e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, so ist

$$\omega_1 = \int_{e_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \text{ und } \omega_3 = i \int_{-e_3}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}$$

$$\text{oder } \omega_3 = \int_{e_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} + \frac{i}{2} \int_{-e_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}},$$

je nachdem e_1, e_2, e_3 sämmtlich reell sind oder aber nur e_1 reell ist. (Vergleiche W. G. A. Biermann: Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta; Inauguraldissertation, Berlin bei Calvary, p. 7 u. ff.)

Die Function $\wp(u)$ hat die Reihenentwicklung:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4.5} u^2 + \frac{g_3}{4.7} u^4 + \frac{g_2^2}{16.3.25} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{16.5.7.11} u^8 + \ldots$$

---

[1]) Ueber die Function $\wp(u)$, welche Herr Prof. Weierstrass der Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde gelegt hat, finden sich Literaturangaben auf pag. 102 im Anhange der Preisschrift von Herrn Prof. Schwarz: Bestimmung einer speciellen Minimalfläche; Berlin, Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften, 1871.

Demnach ist

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2.5}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \ldots .$$

Als Darstellung der Function $\wp'(u)$ durch einen Quotienten von σ-Produkten ergibt sich nun

$$\wp'(u) = \sqrt{4(\wp(u) - e_1).(\wp(u) - e_2).(\wp(u) - e_3)} =$$
$$= -2\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} \cdot \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} \cdot \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}$$

nach der Formel: $\wp(u) - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)}\right)^2$.

Dabei ist $\sigma_\lambda(u) = e^{-\eta_\lambda u}\frac{\sigma(u + \omega_\lambda)}{\sigma(\omega_\lambda)}$.

Um diesen Quotienten mit demjenigen für die Function r in möglichste Uebereinstimmung zu bringen, wenden wir noch die Beziehung an

$$\sigma(u + \omega_\lambda) = -e^{2\eta_\lambda u}\,\sigma(u - \omega_\lambda),$$

und da in Folge der oben erwähnten Relationen zwischen den Grössen η und ω, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$ ist, so ist

$$\wp'(u) = 2\frac{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u - \omega_3)}{\sigma(\omega_1)\,\sigma(\omega_2)\,\sigma(\omega_3)\,[\sigma(u)]^3}.$$

Hieraus erkennen wir, dass $\wp'(u)$ genau in denselben Punkten und von derselben Ordnung Null und unendlich gross wird, wie die Function r. (Man hätte dies übrigens auch aus $u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, $s = \wp(u)$ ersehen können; denn es wird $\wp'(u) = 0$ für e_1, e_2, e_3. Da aber $\wp(\omega_\lambda) = e_\lambda$, so entsprechen den Wurzeln e_1, e_2, e_3 die Werthe $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ von u. Ferner wird $\wp'(u) = \infty$ für $s = \infty$; dem Punkte $s = \infty$ entspricht aber der Punkt $u = 0$.) Daraus schlies-

sen wir, dass sich r und $\wp'(u)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden können. Zur Bestimmung desselben genügt die Vergleichung der ersten Glieder der Entwicklungen von r und $\wp'(u)$ z. B. für die Umgebung des Punktes $u = 0$. Wir hatten für diesen Fall

$$r = -\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{u^3} + \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{27} u^3 + \ldots\ldots$$

Ferner ist $\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2.5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \ldots\ldots$ Wir finden demnach

$$r = \frac{27}{16} \wp'(u)$$

und es ergibt sich überdiess durch die Vergleichung der Coefficienten der nächstfolgenden Glieder, dass die Invarianten der hier in Frage kommenden Function $\wp(u)$ sind: $g_2 = 0$ (wie sich auch unmittelbar aus der Figur ablesen lässt) und $g_3 = \frac{2^{10}}{3^6}$.

Zu demselben Ergebnisse wären wir gelangt, wenn wir von dem früheren Transformationsresultat ausgegangen wären, nämlich von

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = \frac{3}{4} \frac{dv}{\sqrt{v^3 - 4}}.$$

Es werde auf der rechten Seite dieser Gleichung der positive Zweig der Quadratwurzel gewählt. Lässt man x in positivem Sinne längs der reellen Axe sich bewegen von 0 bis $+1$, so bewegt sich v in negativem Sinne auf der reellen Axe von $+\infty$ bis $\sqrt[3]{4}$ (diess ergibt sich leicht aus der Verfolgung der Abbildungen, welche durch die successiven Substitutionen, die wir bei der Transformation angewandt haben, herbeigeführt werden); es ist daher dv negativ. Hieraus folgt

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^4)}} = -\frac{3}{4}\int_\infty^v \frac{dv}{\sqrt{v^3-4}} = \frac{3}{4}\int_v^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^3-4}}.$$

Sei endlich $v = \frac{9}{4}w$, so wird

$$u = \frac{3}{4}\int_v^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^3-4}} = \int_w^\infty \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - \frac{2^{10}}{3^6}}}.$$

Folglich ist $w = \wp\left(u, 0, \frac{2^{10}}{3^6}\right)$, wo 0 und $\frac{2^{10}}{3^6}$ die Invarianten dieser Function $\wp(u)$ bedeuten. Nun ist der Reihe nach

$$\wp(u) = w = \frac{4}{9}v = \frac{4}{9}t^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}};$$

also ist

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\wp(u)\right)^3$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\wp(u)\right)^3 - 4$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = r = \frac{27}{16}\sqrt{4\wp(u)^3 - \frac{2^{10}}{3^6}} = \frac{27}{16}\wp'\left(u, o, \frac{2^{10}}{3^6}\right).$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt

$$x = \sqrt{\frac{27}{32}\wp'(u) + \sqrt{\frac{27^2}{32^2}\wp'(u)^2 + 1}}.$$

Da $\wp'(u)$ eine eindeutige, doppelt periodische Function von u ist, so ist also in der That x eine vierdeutige, doppelt periodische Function von u.

Damit ist nun auch diejenige analytische Function bestimmt, durch welche die oben näher bezeichnete specielle Art der Abbildung der Octaederoberfläche auf die Ebene X, also auch auf die Kugeloberfläche, herbeigeführt wird.

Es kann sich jetzt nur noch darum handeln, diejenigen Formeln anzugeben, welche für die numerische Rechnung am geeignetsten erscheinen. Es war

$$\wp'(u) = -2\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3}.$$

Wird $u = \frac{2\omega_1}{\pi} v$ gesetzt, so gelten zwischen den σ-Functionen und den Jacobi'schen ϑ-Functionen die Relationen:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}v^2} \cdot \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_1' 0}$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}v^2} \cdot \frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_2 0}$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}v^2} \cdot \frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_3 0}$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi_2}v^2} \cdot \frac{\vartheta v}{\vartheta 0}$$

Darnach ist

$$\wp'(u) = -2\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^3 \left(\frac{\vartheta_1' 0}{\vartheta_1 v}\right)^3 \cdot \frac{\vartheta v \,.\, \vartheta_2 v \,.\, \vartheta_3 v}{\vartheta 0 \,.\, \vartheta_2 0 \,.\, \vartheta_3 0}.$$

Die verschiedenen Functionen ϑ sind definirt durch die Reihen

$$\vartheta v = 1 - 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + \ldots.$$

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3v + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5v - \ldots.$$

$$\vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3v + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5v + \ldots.$$

$$\vartheta_3 v = 1 + 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v + 2q^9\cos 6v + \ldots.,$$

worin $q = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1}\pi i}$. Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$\vartheta_1' 0 = \vartheta 0 \,.\, \vartheta_2 0 \,.\, \vartheta_3 0.$$

Also ist $\wp'(u) = -2\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^3 . (\vartheta 0 . \vartheta_2 0 . \vartheta_3 0)^2 . \frac{\vartheta v . \vartheta_2 v . \vartheta_3 v}{(\vartheta_1 v)^3}$

Die Constanten $\vartheta 0$, $\vartheta_2 0$, $\vartheta_3 0$ stehen mit den Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ in folgendem Zusammenhang:

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_3 0 \, \vartheta 0$$

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta 0 . \vartheta_2 0$$

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_2 0 . \vartheta_3 0$$

Darnach hat man die Gleichung:

$$\vartheta 0 . \vartheta_2 0 . \vartheta_3 0 = \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}.$$

Es lässt sich daher einfacher schreiben:

$$\wp'(u) = -2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \cdot \frac{\vartheta v . \vartheta_2 v . \vartheta_3 v}{(\vartheta_1 v)^3}$$

Es folgen hier noch die Werthe einiger Constanten.

Die drei Wurzeln der Gleichung $4\wp(u)^3 - \frac{2^{10}}{3^6} = 0$ sind: $e_1 = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$, $e_2 = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9} \cdot \varepsilon^2$, $e_3 = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9} \cdot \varepsilon$, wo $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, also $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nach Früherem ist $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \varepsilon$, folglich

$$q = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1}\pi i} = e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi i} = -ie^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} = -i.0{,}0658287$$

Zur Berechnung von ω_1 dienen die Formeln:

$$\frac{2K}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + \ldots.)^2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot K$$

(Bringt man $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ auf die Legendre'sche Normalform $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, wobei $k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$, so ist

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \cdot)$$

Es ist $\frac{2K}{\pi} = 0{,}9827414 - i \,.\, 0{,}2633248$

$$\omega_1 = 1{,}4457160$$

$$-2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} = -(-i)^{\frac{1}{2}} \,.\, 2{,}7016385.$$

Somit erhält $\wp'(u)$ schliesslich die Form:

$$\wp'(u) = -(-i)^{\frac{1}{2}} \,.\, 2{,}7016385 \,.$$

$$[1 - 2q\cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v \ldots] \,.$$

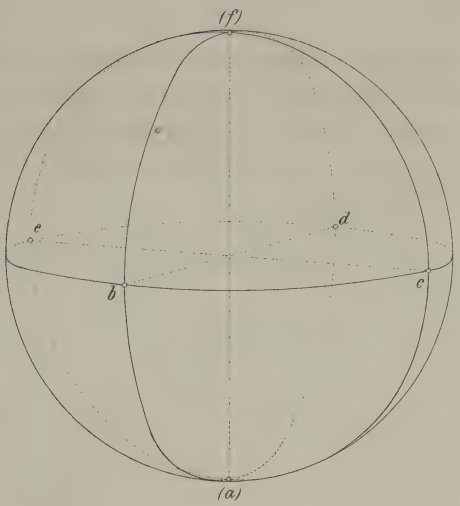
$$\frac{[2q^{\frac{1}{4}}\cos v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3v + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5v + \ldots][1 + 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v + 2q^9\cos 6v \ldots]}{[2q^{\frac{1}{4}}\sin v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3v + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5v - \ldots]^3} \,.$$

Will man nun die Oberfläche eines Octaeders von beliebiger Kantenlänge conform auf die Oberfläche einer Kugel abbilden, so hat man nur in der obigen Formel für x an Stelle von u zu setzen αu, wo α das Verhältniss der Kantenlänge des abzubildenden Octaeders zur Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_1$ unseres speciellen Octaeders bedeutet.

Hiermit ist nun die Aufgabe zugleich in allgemeinster Weise gelöst, da durch eine specielle Abbildungsart alle Abbildungen mit denselben wesentlichen Eigenschaften durch Verwandlung mittelst reciproker Radien aus dieser einen erhalten werden können. Insbesondere kann über

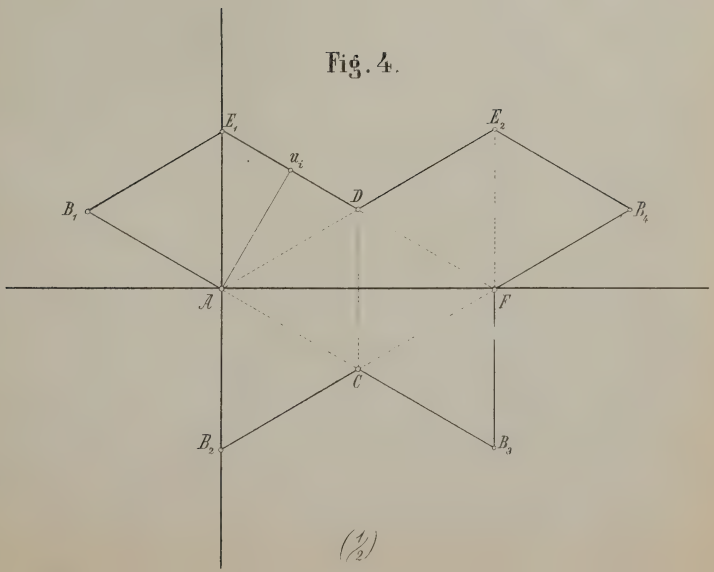
die hierbei auftretenden Constanten so verfügt werden, dass drei gegebenen Punkten der Octaederoberfläche drei gegebene Punkte der Kugeloberfläche entsprechen, wobei überdiess der Sinn der Aehnlichkeit noch vorgeschrieben werden kann.

Fig. 2.



(1/1)

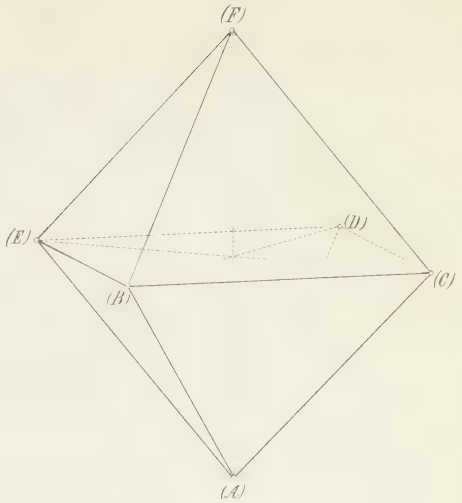
Fig. 4.



(1/2)

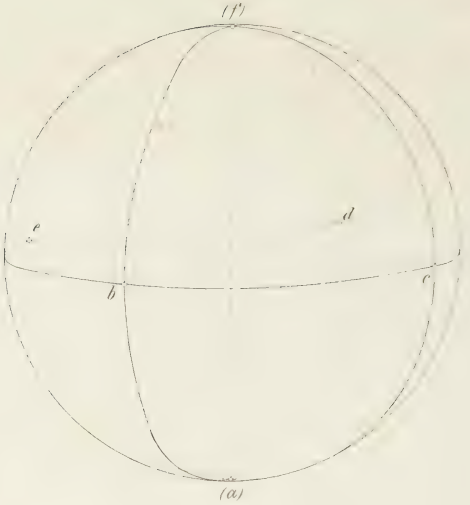
Amstein. Conf. Abbildung des Octaeders auf die Kugel.

Fig. 1.



$(\frac{1}{1})$

Fig. 2.



$(\frac{1}{1})$

Fig. 3.

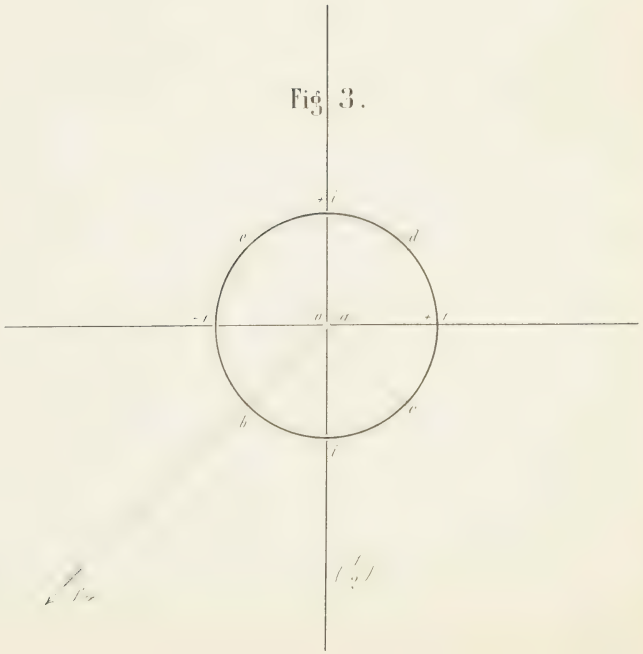
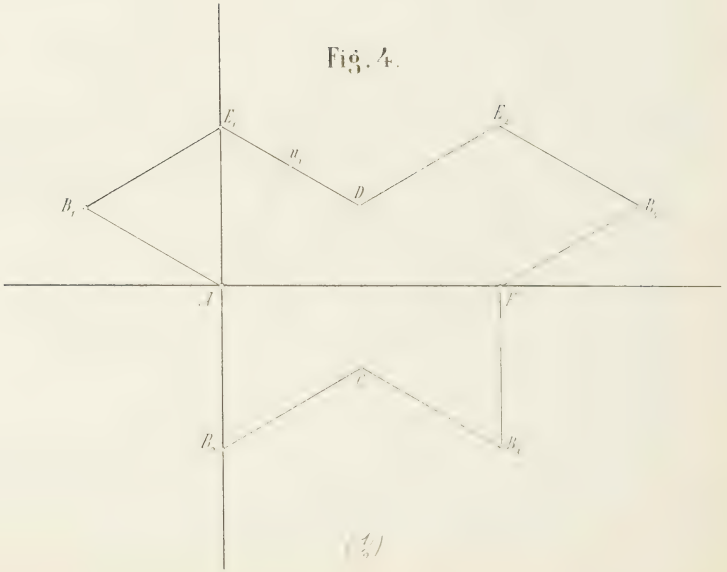


Fig. 4.



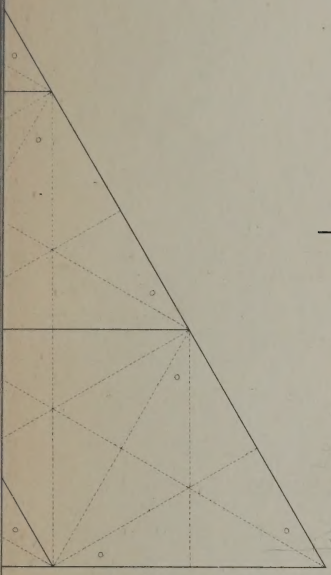
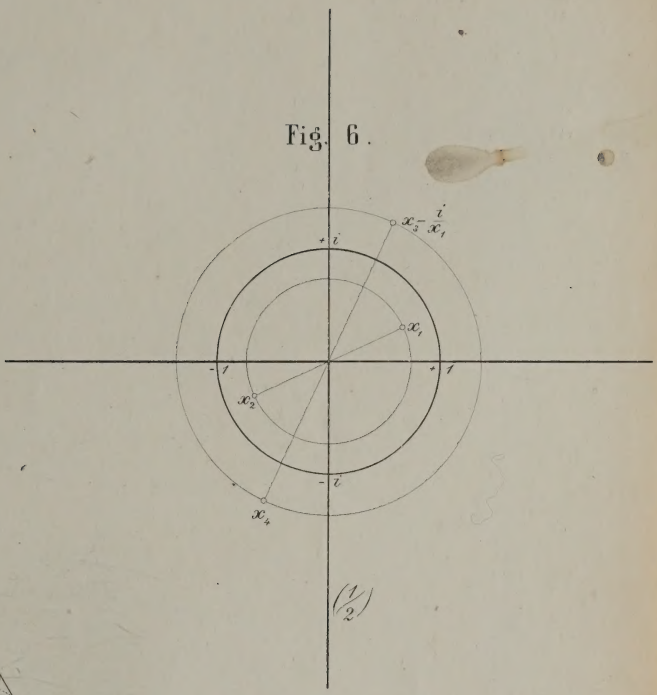
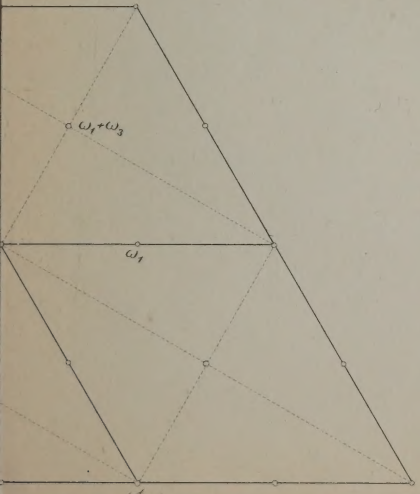


Fig. 6.



$(\frac{1}{2})$



$(\frac{1}{2})$

stein. Conf. Abbildung des Octaeders auf die Kugel.

Fig. 5.

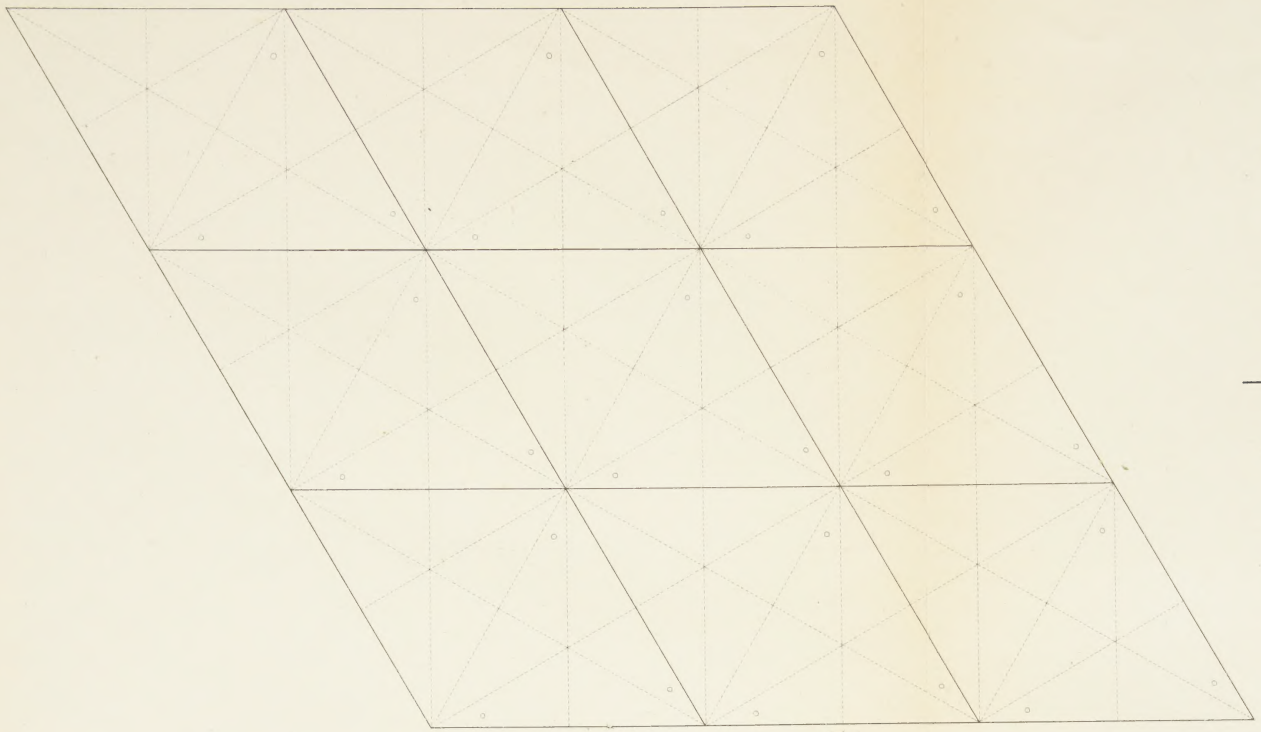


Fig. 6.

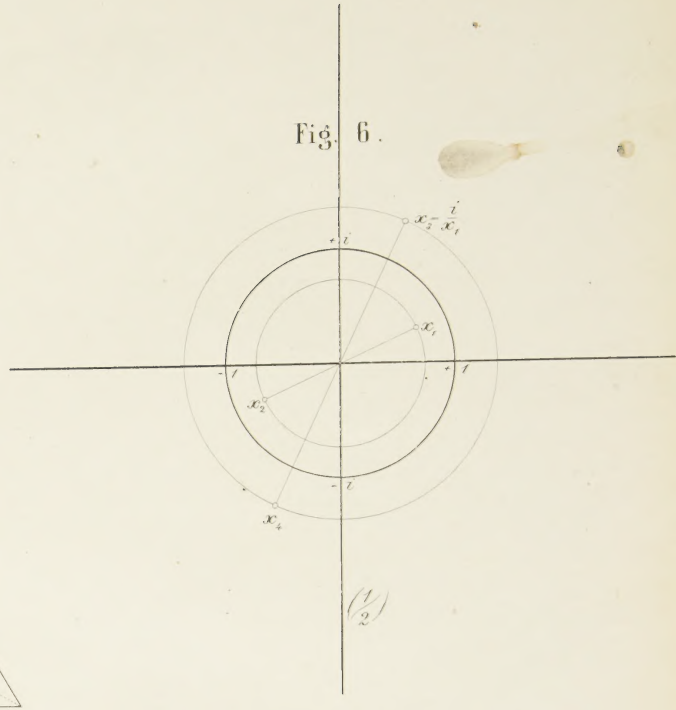
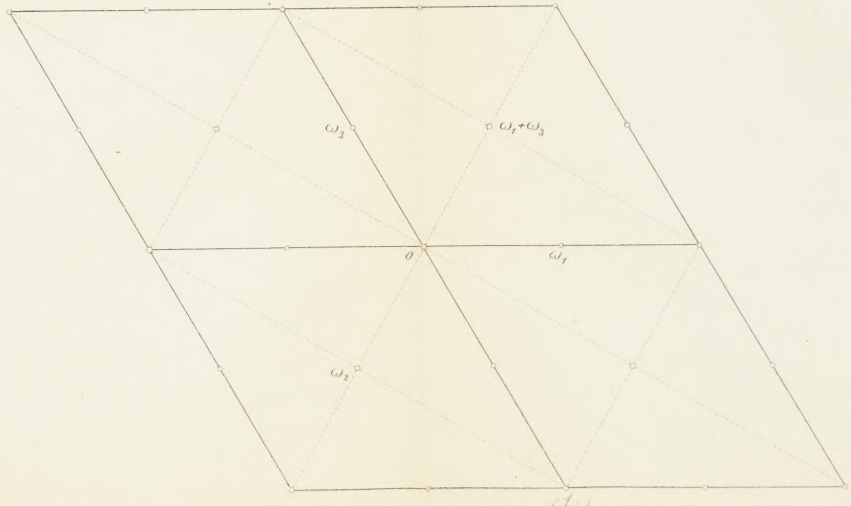



Fig. 7.